

25. Популяционные игры. Равновесие Нэша и строгое равновесие.

Популяционная игра - статическая модель взаимодействия в большой однородной группе индивидуумов.

$$G = \langle J, f_j(\pi, \omega), j \in J, \pi \in \Pi, \omega \in \Omega \rangle,$$

- J - множество стратегий участников игры;
- $\pi = (\pi_j)_{j \in J}$ - распределение игроков по стратегиям;
- $\Pi = \{\pi | \pi_j > 0 \sum_{j \in J} \pi_j = 1\}$ - стандартный симплекс;
- $f_j(\pi, \omega)$ - выигрыш игроков, использующих стратегию j в зависимости от распределения по стратегиям π и других параметров модели ω (например, общей численности популяции и состояния внешней среды);

Равновесием по Нэшу популяционной игры G называется такое распределение π^* , что всякая стратегия, используемая с положительной частотой, является оптимальным ответом на данное распределение при любом значении параметра ω , т.е.

$$\forall \omega \in \Omega, \forall j \in J (\pi_j^* > 0) \Rightarrow j \in \text{Arg max}_{i \in J} f_i(\pi^*, \omega).$$

Если $f_j(\pi, \omega) = \alpha(\pi, \omega) \bar{f}_j(\pi) + b(\pi, \omega)$, т.е. функции выигрыша разложимы, то: $\forall j \in J : \pi_j^* > 0 \rightarrow j \in \text{Arg max}_{i \in J} \bar{f}_i(\pi^*)$.

Эволюционно устойчивой стратегией (ЭУС) для популяционной игры G называется такое распределение π^* , что

$$\forall \omega \in \Omega, \forall \pi \neq \pi^*, \exists \bar{\lambda}(\pi) \in (0, 1) : \forall \lambda \in (0, \bar{\lambda}(\pi)) f_{\pi^*}(\lambda \pi + (1 - \lambda) \pi^*, \omega) > f_{\pi}(\lambda \pi + (1 - \lambda) \pi^*, \omega), \text{ где } f_{\pi}(\pi', \omega) = \sum_{j \in J} \pi_j f_j(\pi', \omega) -$$

средний выигрыш смешанной стратегии, или распределения π , если индивидуумы в популяции распределены по чистым стратегиям.

Понятие ЭУС можно интерпретировать следующим образом. Пусть в некоторую популяцию, находящуюся в состоянии равновесия π^* , внедряется относительно небольшая группа "мутантов" с распределением

по стратегиям π . Тогда, если распределение π^* является эволюционно устойчивым, то внедрившаяся группа не сможет закрепиться в популяции, так как ее средняя приспособленность меньше, чем приспособленность исходной стратегии π^* .

Всякая ЭУС является равновесием Нэша. Действительно, если π не является равновесием, то мутанты с чистой стратегией лучшего ответа на π получают больший выигрыш, чем средний выигрыш в основной популяции. В силу непрерывности f относительно π это справедливо для любой достаточно малой группы таких мутантов. Данное утверждение справедливо, если доля отдельного индивида в популяции пренебрежимо мала в том смысле, что изменение его стратегии не влияет на значения функций выигрыша.

Уточним понятие ЭУС для взаимодействий в группах конечной численности, где изменение стратегии отдельного индивида влияет на значение функций выигрыша.

Для симметричной игры в нормальной форме с n игроками, множеством стратегий S и функцией выигрыша $f_j(s_j, s_{J \setminus j})$ ЭУС определяется как симметричная ситуация $s_j \equiv s$ такая, что при любом изменении стратегии отдельным игроком его выигрыш в новой ситуации будет не больше, чем выигрыш любого из остальных игроков, сохранивших прежнюю стратегию.

Строгим равновесием популяционной игры G называется такое распределение π^* , что все игроки используют одну и ту же стратегию, которая является единственно лучшим ответом на это распределение:

$$\exists \varepsilon > 0, \exists j \in J : \pi_j^* = 1, \text{ и } \forall i \neq j, \forall \omega \in \Omega : f_j(\pi^*, \omega) > f_i(\pi^*, \omega) + \varepsilon.$$

Всякое строгое равновесие является ЭУС.